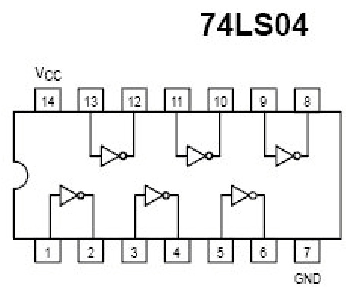
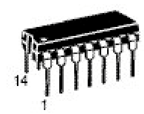
CURSO

Curso Completo de Electrónica Digital





Departamento de Electronica y Comunicaciones
Universidad Pontifica de Salamanca en Madrid
Prof. Juan González Gómez

Capítulo 3

ALGEBRA DE BOOLE

3.1. Introducción

Cuando trabajamos en **ingeniería**, utilizamos *ecuaciones* y *modelos matemáticos* que describen lo que estamos diseñando o analizando. Así por ejemplo, la ecuación

$$V_{max} = 2 \cdot W \cdot log_2 n$$

nos indica cuál es la velocidad máxima de transmisión por un canal que tiene un ancho de banda W y por el que se permiten n estados posibles de la señal transmitida, y será usada por un *Ingeniero de Telecomunicación* **para el diseño** de canales o sistemas de comunicación. Esa ecuación describe *una relación* entre ciertas variables, que son objeto de estudio del Ingeniero.

A lo mejor no entendemos el significado de esta ecuación. No sabemos lo que significa *ancho de banda* o *velocidad máxima de transmisión*, pero sí entendemos las operaciones que hay en ella: hay **productos** y **logaritmos**. Sin saber nada, y partiendo de los datos iniciales:

W = 2500, n = 4, seríamos capaces de calcular el valor de **Vmax**

$$V_{max} = 2 \cdot 2500 \cdot log_2 4 = 2 \cdot 2500 \cdot 2 = 10000$$

Sólo hay que introducir los datos en una calculadora y ya está.

De la misma manera, si un físico nos dice que la posición de cierta partícula viene determinada por la ecuación:

$$x = A \cdot \sin(wt + \varphi)$$

y nos da los siguientes datos: A=5, t=0 y $\varphi = 0$, sabemos calcular el valor de x, que será:

$$x = 5 \cdot \sin(w \cdot 0 + 0)$$

y por las propiedades de los *Números Reales*, que son los que estamos manejando, sabemos que "*algo por cero es cero*" y "*algo más cero es algo*":

$$x = 5 \cdot \sin(w \cdot 0 + 0) = 5 \cdot \sin(0 + 0) = 5 \cdot \sin(0) = 5 \cdot 0 = 0$$

¿Y por qué hemos sabido hacer eso?

Porque conocemos las operaciones que el físico ha utilizado y además sabemos algunas propiedades de ellas.
En estas dos ecuaciones de ejemplo, **los números y las variables son Reales**. El conjunto de los *Números Reales* lo conocemos muy bien, así como todas las operaciones definidas en él.

Estamos acostumbrados a trabajar con ellos desde pequeños, por eso este tipo de ecuaciones nos parecen *intuitivas* y sencillas, aunque no comprendamos lo que significan las variables usadas.

Hemos dicho que los *circuitos digitales* trabajan con números, y que estos números se expresan en *binario*. Veremos más adelante cómo **con un conjunto de ecuaciones podemos describir lo que hace un circuito**, que transforma los números de la entrada y los saca por la salida.

Sin embargo, puesto que estos números vienen expresados en binario, **las variables y números utilizados NO SON REALES**.

Para describir un circuito digital utilizaremos ecuaciones

Para describir un circuito digital utilizaremos ecuaciones matemáticas. Sin embargo, estas ecuaciones tienen variables y números que NO SON REALES, por lo que NO podemos aplicar las mismas propiedades y operaciones que conocemos.
Hay que utilizar nuevas operaciones y nuevas propiedades, definidas en el ALGEBRA DE BOOLE.

Por tanto, vamos a trabajar con unas ecuaciones a las que **NO estamos acostumbrados**. Son muy sencillas, pero al principio pueden resultar poco intuitivas. En este capítulo aprenderemos a trabajar con ellas.

3.2. Las operaciones del Álgrebra de Boole

En el *Álgebra de Boole* hay dos operaciones, denotadas con los símbolos **+** y (-) pero que ***¡¡no tienen nada que ver con las operaciones que todos conocemos de suma y producto!!***. ¡¡¡No hay que confundirlas!!!!. El **+** y el del *Algebra de Boole* se aplican a ***bits***, es decir, a números que sólo pueden ser el **'0'** ó el **'1'**.

3.2.1. La operación +

Esta operación se define de la siguiente manera:

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

Las tres primeras operaciones nos resultan obvias, son iguales que la suma que conocemos, sin embargo la expresión 1 + 1 = 1 nos puede resultar chocante. *¿¿Pero no me habían dicho toda la vida que 1+1=2??*, nos podemos estar preguntando. Sí, pero hay que recordar que aquí estamos utilizando otra operación que **NO ES LA SUMA**, la denotamos con el mismo símbolo '+', **¡¡pero no es una suma normal!! ¡¡Hay que cambiar el "chip"!! ¡¡Ahora estamos con Algebra de Boole!!**

Pasado el pánico inicial, si nos fijamos en esta nueva operación, notamos lo siguiente: **El resultado siempre es igual a '1' cuando alguno de los bits sumandos es igual a '1'**. O lo que es lo mismo, **El resultado de esta suma sólo da '0' si los dos bits que estamos sumando son iguales a cero**. En caso contrario valdrá '1'.

¿Y para qué nos sirve esta operación tan extraña? Veamos un ejemplo. Imaginemos que hay una sala grande a la que se puede acceder a través de dos puertas. En el techo hay una única lámpara y existen dos interruptores de luz, uno al lado de cada puerta de entrada.

Como es lógico, *la luz se enciende cuando algunos de los dos interruptores (o los dos) se activan*. Esto lo podemos expresar mediante una *ecuación booleana*. Para denotar el estado de uno de los interruptores utilizaremos la **variable booleana A**, que puede valor '0' (Interruptor apagado) ó '1' (interruptor activado). Para el otro interruptor usaremos la **variable B**. Y para el estado de la luz, '0' (apagada) y '1' encendida, usaremos la **variable F**.

El estado en el que se encuentra la luz, en función de cómo estén los interruptores **viene dado por la ecuación booleana**:

$$F = A + B$$

que indica que F=1 (Luz encendida) si alguno de los interruptores está a '1' (activado).

Ya lo veremos más adelante, pero podemos ir adelantando unas propiedades muy interesantes.

Si **A** es una variable boolena, se cumple:

$$A + A = A$$
$$1 + A = 1$$
$$0 + A = A$$

3.2.2. La operación " . "

Esta operación se define así:

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

En este caso, la operación es más *intutitiva*, puesto que **es igual que el producto de *números Reales***. Si nos fijamos, vemos que **el resultado sólo vale ’1’ cuando los dos bits están a ’1’**, o visto de otra manera, **el resultado es ’0’ cuando alguno de los dos bits es ’0’**.

Vamos a ver un ejemplo. Imaginemos una caja de seguridad de un banco que sólo se abre cuando se han introducido dos llaves diferentes, una la tiene el director y la otra el jefe de seguridad.

Si sólo se introduce una de ellas, la caja no se abrirá. Modelaremos el problema así. Utilizaremos la **variable A** para referirnos a una de las llaves (’0’ no introducida, ’1’ introducida) y la **variable B** para la otra llave. Con la **variable F** expresamos el estado de la caja de seguridad (’0’ cerrada y ’1’ abierta). El estado de la caja lo podemos expresar con la ecuación:

$$F = A \cdot B$$

que indica que la caja se abrirá (F=1) sólo si A=1 (una llave introducida) y B=1 (la otra llave introducida). En cualquier otro caso, F=0, y por tanto la caja no se abrirá.

Podemos ir adelantando algunas propiedades de esta operación:

- $A \cdot A = A$
- $A \cdot 0 = 0$
- $A \cdot 1 = 1$

3.2.3. La negación

La operación de negación nos permite obtener el estado complementario del bit o variable booleana al que se lo aplicamos. Se define de la siguiente manera:

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0$$

Es decir, que si se lo aplicamos a ’0’ obtenemos ’1’ y si se lo aplicamos al ’1’ obtenemos ’0’. Esta operación nos permite cambiar el estado de una variable booleana. Si **A** es una variable boolena $\overline{A}$, tiene el estado contrario.

3.3. Las propiedades del Álgebra de Boole

Las operaciones del *Álgebra de Boole* las podemos definir utilizando *tablas de verdad*:

- **Operación +**

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- **Operación “.”**

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Las **propiedades** del *Algebra de Boole* son las siguientes:

1. **Las operaciones + y “. “ son CONMUTATIVAS**

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

2. **Elemento Neutro**

$$A+0=A$$

$$A \cdot 1=A$$

3. **Distributiva**

$$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$$

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

4. **Elemento inverso**

$$A+\overline{A}=1$$

$$A\cdot\overline{A}=0$$

Operación de **negación** definida por:

$$\overline{0}=1$$

$$\overline{1}=0$$

Ejercicios:

Para practicar e ir cogiendo soltura con el *Algebra de Boole* se recomienda hacer el **ejercicio 1** de este capítulo.

3.4. Teoremas importantes

Derivados de las propiedades fundamentales, existen una serie de *Teoremas* muy interesantes e importantes que usaremos a lo largo de todo el curso. Algunos los utilizaremos en la teoría y otros para los problemas.

- **Asociatividad**

$$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$A\cdot B\cdot C=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

- **Idempotencia**:

$$B+B=B$$

$$B\cdot B=B$$

- **Ley de Absorción**

$$A + A \cdot B = A$$
$$A \cdot (A + B) = A$$

Este teorema es muy importante puesto que nos permite realizar simplificaciones en las expresiones.

- **Leyes de DeMorgan**

$$\overline{B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} \cdot ... \cdot \overline{B_n}$$
$$\overline{B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot ... \cdot B_n} = \overline{B_1} + \overline{B_2} + \overline{B_3} + ... + \overline{B_n}$$

Este teorema es también muy importante y lo usaremos constantemente. Vamos a hacer algunos ejemplos para aprender a utilizarlo:

- **Ejemplo 1**: $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$
- **Ejemplo 2**: $\overline{A \cdot B + C.D} = \overline{A \cdot B} \cdot \overline{C \cdot D} = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{C} + \overline{D})$
- **Ejemplo 3**: $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$
- **Ejemplo 4**: $\overline{A \cdot \overline{B} + \overline{C}} = \overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}} = (\overline{A} + \overline{\overline{B}}) \cdot C = (\overline{A} + B) \cdot C$

- **Teorema de Shannon**:

$$\overline{F(B_1, B_2, ..., B_n, +, \cdot)} = F(\overline{B_1}, \overline{B_2}, ..., \overline{B_n}, \cdot, +)$$

Este teorema es una generalización de las leyes de DeMorgan. Lo que nos dice es que si tenemos cualquier expresión booleana negada, es igual a la misma expresión en la que todas las variables estén negadas y en la que se sustituyan las operaciones + por “ . “ y viceversa.

Veamos algunos ejemplos:

- **Ejemplo 5**: $\overline{(B_1 + B_2) \cdot B_3} = (\overline{B_1} \cdot \overline{B_2}) + \overline{B_3}$

En este este ejemplo se podrían haber aplicado las leyes de DeMorgan sucesivas veces, como hemos hecho en ejemplos anteriores, sin embargo podemos aplicar el *Teorema de Shannon*.

- **Ejemplo 6:** $\overline{A.\overline{B}+\overline{C}}$=$(\overline{A}+B)\cdot C$
- **Ejemplo 7:** $\overline{A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}=\overline{A}+B+C$

- **Teorema de expansión**:

$$F(B_1,...,B_n)=B_1\cdot F(1,B_2,...,B_n)+\overline{B_1}\cdot F(0,B_2,...,B_n)$$

$$F(B_1,...,B_n)=[B_1+F(0,B_2,...,B_n)]\cdot[\overline{B_1}+F(1,B_2,...,B_n)]$$

Este teorema es más teórico y no tiene aplicación directa en los problemas.

Ejercicios:

Hacer el ejercicio 2.

3.5. Funciones booleanas

3.5.1. Funciones reales y funciones booleanas

Hasta ahora hemos visto en qué operaciones se basa el Algebra de Boole y algunas de sus propiedades. Para aprender a trabajar con este nuevo tiepo de expresiones booleanas es necesario practicar, por eso se recomienda que se hagan los ejercicios propuestos.

Utilizando *expresiones booleanas*, vamos a definir **Funciones booleanas**, que son exactamente iguales a las funciones matemáticas a las que estamos habituados pero con la particularidad de que **las variables son booleanas** y que **los valores devueltos por la función también son booleanos,** es decir, **una función booleana sólo puede tomar los valores ’0’ ó ’1’**.

Como hemos hecho antes, vamos a ver un ejemplo utilizando una función matemática de las que todos conocemos. Por ejemplo esta:

$$f(x)=x^2+1$$

Se trata de una *función Real* que tiene una *variable Real (x)*. Para cada valor de x, otenemos el valor de la función. Así por ejemplo podemos calcular los siguiente:

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 2$
- $f(2) = 5$
- $f(3) = 10$

Como es una **función Real**, obtenemos como valores de la función **Números Reales**. También podemos definir funciones reales de 2 ó más variables, como por ejemplo:

- $f(x, y) = x \cdot y + 3$. **Función de 2 variables**
- $g(x, y, z) = x \cdot y + z$. **Función de 3 variables**

Como estamos acostumbrados a trabajar con este tipo de funciones, nos resultan sencillas. Ahora vamos a definir **funciones booleanas**. Para ello hay que tener en mente que trabajaremos con variables booleanas y que por tanto usaremos las operaciones + y "." del **Algebra de Boole**, y que como ya sabemos, nada tienen que ver con las operaciones suma y producto a las que estamos habituados.

Por ejemplo, sea la siguiente **función booleana de una variable**:

$$F(A) = \overline{A}$$

El valor devuelto por la función es el negado del que se le pasa por la variable. Como la variable A es booleana, sólo puede tomar los valores '0' y '1'. Los que la función F toma son:

- $F(0)=\overline{0}=1$
- $F(1)=\overline{1} = 0$

Vamos a definir una función un poco más compleja, usando dos variables booleanas, A y B:

$$F(A,B) = (A+B) \cdot \overline{B}$$

¿Cuando vale F(0,0)? sólo hay que sustituir en la función los valores de A y B por '0', obteniéndose:

- $F(0,0)=(0+0)\cdot\overline{0} = 0 \cdot 1 = 0$

Calcularemos el valor de F para el resto de valores de entrada de A y B:

- $F(0,1) = (0+1) \cdot \overline{1} = 1 \cdot 0 = 0$
- $F(1,0) = (1+0) \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 = 1$
- $F(1,1) =$ Se deja como ejercicio para practicar (La solución es 0).

Fijándonos en esta función tan sencilla, podemos darnos cuenta de varias cosas:

1. Puesto que las variables de entrada A y B, sólo pueden tomar los valores '0' y '1', hay 4 casos distintos:

   a) A=0, B=0 $\Rightarrow F(0,0) = 0$

   b) A=0, B=1 $\Rightarrow F(0,1) = 0$

   c) A=1, B=0 $\Rightarrow F(1,0) = 1$

   d) A=1, B=1 $\Rightarrow F(1,1) = 0$

2. Antes de calcular los valores que toma la función, según lo que valgan A y B, se pueden aplicar algunas propiedades para obtener una **función más simplificada** (Como veremos en el apartado 3.7):

$F(A,B) = (A+B)\cdot\overline{B} = \{\text{Aplicando la propiedad distributiva}\} = A\cdot\overline{B} + B\cdot\overline{B} = A\cdot\overline{B}$

Es más sencillo trabajar con esta función simplificada: $F(A,B) = A\cdot\overline{B}$

Las funciones booleanas pueden ser de muchas más variables, como en los siguientes ejemplos:

- $F(x,y,z) = x\cdot y + z$. Función booleana de **3 variables**
- $F(A,B,C,D) = \overline{A}.B + C.\overline{D}$. Función booleana de **4 variables**
- $F(E_4,E_3,E_2,E_1,E_0) = \overline{E_4}\cdot\overline{E_3}\cdot E_2\cdot E_1\cdot\overline{E_0}$. Función booleana de **5 variables**

Por cuestiones de comodidad, muchas veces no escribimos entre paréntesis las variables de la función, así por ejemplo podemos definir una **función de 3 variables** de la siguiente manera:

$$F = \overline{A}\cdot B + \overline{C}$$

Ejercicios:

Hacer el ejercicio 3

Continuará.....

Nota de Radacción: El lector puede descargar este capítulo y capítulos anteriores del curso desde la sección **“Soporte Técnico”** en el sitio web de **EduDevices** **(www.edudevices.com.ar)**

WWW.EDUDEVICES.COM.AR